Analiza I_2, egzamin 11 czerwca 2010

9:05 — 12:35

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Znaleźć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin^n x}{\sqrt{1+\sin^n x}}\, dx\,.$$

---

2. Zbadać, czy istnieje całka

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x^2-\pi^2}}\, dx\,.$$

---

3. Niech $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że

$$f(0) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} x\cdot \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\, dt\,.$$

---

4. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin\frac{1}{2n^2}\cos\frac{k\pi}{2n^2}}{4-\sin^2\frac{k\pi}{2n^2}}\,.$$

---

5. Wykazać, że dla każdej liczby $c\in\mathbb{R}$ oraz każdej liczby $x\in(-1,1)$ zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+c}{n} x^n = (1-x)^{-c-1}\,.$$

---

6. Funkcja f jest określona dla $x>0$, $x\neq 1$, wzorem $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt$.

Dowieść, że funkcja f jest rosnąca i wypukła w każdym z przedziałów $(0,1)$, $(1,\infty)$.

Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Niech $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Dowieść, że funkcja f jest różniczkowalna na półprostej $(0,\infty)$.

Czy jest ona wypukła?

Czy funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna?
